Tema 1

Àlgebres de Hopf i extensions Hopf-Galois

Montserrat Vela

Departament de Matemàtica Aplicada II (UPC)

Introducció

Extensió de Hopf-Galois

Definició: Sigui K/k una extensió finita de cossos.

Diem que K/k és una extensió de Hopf-Galois si existeixen:

- un àlgebra de Hopf H sobre k de dimensió finita i
- una acció de Hopf sobre K,

$$\mu : H \to \text{End}(K) \quad (\text{ó } \mu' : H \otimes K \to K)$$

tal que l'aplicació $(1, \mu) : K \otimes_k H \to \text{End}(K)$ és un isomorfisme.

En aquest cas, diem que K/k és una extensió Hopf-Galois mitjançant H ó una extensió H-Galois.

Exemple 1: Extensions de Galois

Si K/k és una extensió de Galois amb grup G, és també una extensió de Hopf-Galois:

- Una àlgebra de Hopf és $H = k[G] = \{\sum_{g\in G} a_g \cdot g, a_g \in k\}$.
- Una acció de Hopf sobre K és ,

$$\begin{array}{rccc} \mu: & K[G] & \to & \mathrm{End}_k(K) \\ & \displaystyle\sum_{g\in G} a_g g & \mapsto & \displaystyle\sum_{g\in G} a_g \varphi(g) \end{array}$$

  induïda per l'isomorfisme $G \overset{\varphi}{\simeq} \mathrm{Aut}(K|k)$.

Observació:
Aquesta és una estructura de Hopf-Galois per a l'extensió galoisiana K/k, però pot no ser única.
En particular, si G és un grup no abelià, hi ha, almenys dues estructures de Hopf-Galois per a K/k.

Exemple 2: L'extensió $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}$

Considerem l'extensió $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$, amb $\alpha = \sqrt[3]{2}$. És una extensió de Hopf-Galois:

- Una àlgebra de Hopf és $H = H = \mathbb{Q}[c,s]/(3s^2 + c^2 - 1, (2c+1)s, (2c+1)(c-1))$ on c i s són dos endomorfismes de l'espai vectorial $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ definits per

$$c(1) = 1, \quad c(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha, \quad c(\alpha^2) = -\frac{1}{2}\alpha^2$$

$$s(1) = 0, \quad s(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha, \quad s(\alpha^2) = -\frac{1}{2}\alpha^2.$$

Observem que si $x \in \mathbb{Q}(\alpha)$, aleshores $x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow c(x) = x$ i $s(x) = 0$.

A més c i s estan relacionats amb l'estructura d'anell de $\mathbb{Q}(\alpha)$ per

$$\begin{array}{l} c(xy) = c(x)\cdot c(y) - 3\cdot s(x)\cdot s(y), \\ s(xy) = c(x)\cdot s(y) + s(x)\cdot c(y) \end{array} \quad , \quad x, y \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

- Una acció de Hopf sobre K és , $\mu : H \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha))$ ve donada per

$$c(1) = 1, \quad c(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha, \quad c(\alpha^2) = -\frac{1}{2}\alpha^2$$

$$s(1) = 0, \quad s(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha, \quad s(\alpha^2) = -\frac{1}{2}\alpha^2$$

Exemple 3: L'extensió $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})|\mathbb{Q}$

Considerem l'extensió $K = \mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$, con $\alpha = \sqrt[4]{2}$. És una extensió de Hopf-Galois:

- Una àlgebra de Hopf és $H = \mathbb{Q}\left[\frac{e+e^{-1}}{2}, \frac{e-e^{-1}}{2i}\right]$ on e és un generador de $N \simeq C_4$, el grup de Galois de l'extensió $K(i)|\mathbb{Q}(i)$
- Una acció de Hopf sobre K és , $\mu : H \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha))$ ve donada per

$$e(1) = 1, \quad e(\alpha) = i\,\alpha, \quad e(\alpha^2) = -\alpha^2, \quad e(\alpha^3) = -i\alpha^3.$$

Aquesta extensió és la més senzilla per la qual existeixen més d'una estructura de Hopf-Galois.
L'àlgebra

$$H' = \mathbb{Q}\left[s\,t, s+t, \sqrt{-2}(t-s)\right]$$

per certs s, t tals que $s^2 = t^2 = 1$, "group-like"
és una altra àlgebra de Hopf que dóna estructura de Hopf-Galois a $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})|\mathbb{Q}$.

Contraexemple

Sigui $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ amb $[K : \mathbb{Q}] = 5$ de manera que Gal$(\widetilde{K}/\mathbb{Q}) \simeq S_5$

on $\widetilde{K}$ és la clausura galoisiana de K sobre $\mathbb{Q}$.

Aleshores, $K/\mathbb{Q}$ no és Hopf-Galois.

Àlgebres i coàlgebres. Àlgebres de Hopf

Àlgebres de Hopf: Aplicacions

Àlgebres de Hopf: Estructura d'àlgebra i coàlgebra
- Primer exemple en 1941: Heinz Hopf (1894-1971) en Topologia algebraica.
- Finals dels 60's: Estudi des del punt de vista estrictament algebraic.
- Finals dels 80's: Mecànica quàntica i grups quàntics (Àlg. Hopf no commutatives i no cocommutatives).

Apareixen en molts aspectes de les Matemàtiques:

Teoria de Galois
Teoria de Nombres (grups formals)
Teoria dels anells graduats
Geometria algebraica (esquemes de grups afins)
Teoria de Lie (l'àlgebra envolvent universal d'un àlgebra de Lie és un àlgebra de Hopf)
Teoria d'operadors
Teoria de la representació
Teoria de la distribució
Combinatòria
Mecànica quàntica

Àlgebra sobre k

k cos

Un àlgebra A sobre k és un anell amb unitat que és un k-e.v. amb el producte $A \times A \to A$ bilineal.

- Per la prop.universal de $\otimes$, aquest producte pot considerar-se com una aplicació lineal $m : A \otimes A \to A$ que denotem com $m(a \otimes b) = a \cdot b$ per $a, b \in A$.

- Com $1_A \in A$ tenim, l' aplicació unitat que és lineal i injectiva $u : k \to A$ on $u(c) := 1_A \cdot c, \forall c \in k$.

  En particular $1_A = u(1_k)$.

Àlgebra sobre k

Definició: Un **àlgebra** sobre k és un triplet (A, m, u) on
A és un k-espai vectorial i
$m : A \otimes A \to A$ i $u : k \to A$ són aplicacions k-lineals t.q.

- Associativitat: $m(m \otimes Id) = m(Id \otimes m) : A \otimes A \otimes A \to A$,
- Unitat: $m(u \otimes Id) = m(Id \otimes u) = Id : A \to A$,

és a dir, els diagrames següents són commutatius:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes Id"] \arrow[d, "Id\otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}
\qquad i \qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "u\otimes Id"] & & A \otimes k \arrow[ul, "Id\otimes u"'] \\
& A \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}
$$

A és commutativa si $m \circ \tau = m$, i.e, si és commutatiu el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

($\tau : U \otimes V \simeq V \otimes U$, $\tau(u \otimes v) : v \otimes u, \forall u \in U, v \in V$)

Coàlgebra sobre k

"Dualitzant"(canviat de sentit les fletxes)

Definició: Una **coàlgebra** sobre k és un triplet (C, Δ, ε) on
C és un k-espai vectorial i
$\Delta : C \to C \otimes C$ (coproducte) i $\varepsilon : C \to k$ (counitat) són aplicacions k-lineals t.q.

- Coassociativitat: $(\Delta \otimes Id)\Delta = (Id \otimes \Delta)\Delta : C \to C \otimes C \otimes C$,
- Counitat: $(\varepsilon \otimes Id)\Delta = (Id \otimes \varepsilon)\Delta = Id : C \to C$,

és a dir, els diagrames següents són commutatius:

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta \otimes Id"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "Id \otimes \Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad i \qquad
\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes Id"'] \arrow[dr, "Id \otimes \varepsilon"] & \\
k \otimes C \arrow[dr, "\simeq"'] & & C \otimes k \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & C \arrow[uu, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

C és **cocommutativa** si $\tau \circ \Delta = \Delta$, és a dir, si és commutatiu el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
C \otimes C \arrow[rr, "\tau"'] & & C \otimes C
\end{tikzcd}$$

(A, m, u) àlgebra amb
A un k-e.v.
$m : A \otimes A \to A$ i $u : k \to A$ apl. lineals
t.q. communten

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m \otimes Id"] \arrow[d, "Id \otimes m"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"'] & A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
K \otimes A \arrow[ur, "u \otimes Id"] & & A \otimes K \arrow[ul, "Id \otimes u"'] \\
 & A \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Commutativa

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "m"'] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

(C, Δ, ε) coàlgebra amb
C un k-e.v.
$\Delta : C \to C \otimes C$ i $\varepsilon : C \to k$ apli. lineals
t.q. communten

$$\begin{tikzcd}
C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta \otimes Id"'] \\
C \otimes C \arrow[u, "Id \otimes \Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes Id"'] \arrow[dr, "Id \otimes \varepsilon"] & \\
K \otimes C \arrow[dr, "\simeq"'] & & C \otimes k \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & C \arrow[uu, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}$$

Cocommutativa

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\Delta"'] \arrow[dr, "\Delta"] & \\
C \otimes C \arrow[rr, "\tau"'] & & C \otimes C
\end{tikzcd}$$

Biàlgebra sobre k

Definició: Una **biàlgebra** sobre k és un quintet $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ tal que:

- (A, m, u) és un àlgebra,
- (A, Δ, ε) és una coàlgebra i
- els morfismes
$$\Delta : A \to A \otimes A \quad \text{i} \quad \varepsilon : A \to k$$
són morfismes d'àlgebres

  (ó, equivalentment, $m : A \otimes A \to A$ i $u : k \to A$ són morfismes de coàlgebres).

Exemples

1. k és coàlgebra:

	Coproducte	Counitat
	$\Delta: \quad k \to k \otimes k$	$\varepsilon = Id_k: \quad k \to k$
	$\alpha \mapsto \Delta(\alpha) = \alpha \otimes 1$	$\alpha \mapsto \alpha$

2. $S \neq \emptyset$ conjunt, $V =< S >_k = KS$ el k-e.v. amb base S,

V és coàlgebra $\quad \begin{array}{rl} \Delta: & KS \to KS \otimes V \\ & s \mapsto s \otimes s \end{array} \quad \begin{array}{rl} \varepsilon: & KS \to k \\ & s \mapsto 1 \end{array}$ extesos per linealitat.

(Tot espais vectorial es pot dotar d'estructura de coàlgebra)

3. V k-e.v. amb base $\{c_m | m \in \mathbb{N}\}$.

V és coàlgebra $\quad \begin{array}{rl} \Delta: & V \to V \otimes V \\ & c_m \mapsto \displaystyle\sum_{i=0}^{m} c_i \otimes c_{m-i} \end{array} \quad \begin{array}{rl} \varepsilon: & V \to k \\ & c_m \mapsto \delta_{0,m} \end{array}$ extesos per linealitat.

(*Coàlgebra potència dividida*)

Exemples

4. L'anell de polinomis $k[x]$ té estructura:

- d'àlgebra $\quad m(x^r \otimes x^l) = x^{r+l}$
- de coàlgebra $\quad \Delta(x^n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i} \qquad \varepsilon(x^n) = 0$ si $n > 0$ $\varepsilon(1) = 1$

  extesos per linealitat.

  (*Coàlgebra bilineal*)
- de biàlgebra $\quad \Delta(x^n)\Delta(x^m) = \Delta(x^{n+m}) \qquad \varepsilon(x^n)\varepsilon(x^m) = \varepsilon(x^{n+m})$.

5. L'e.v. de les matrius quadrades $\mathbb{M}_{n\times n}(k)$ amb base $(e_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ té estructura de coàlgebra

$$\Delta : \begin{array}{l} \mathbb{M}_{n\times n}(k) \to \mathbb{M}_{n\times n}(k) \otimes \mathbb{M}_{n\times n}(k) \\ e_{i,j} \mapsto \displaystyle\sum_{1\leq p\leq n} e_{i,p} \otimes e_{p,j} \end{array} \qquad \varepsilon : \begin{array}{l} \mathbb{M}_{n\times n}(k) \to k \\ e_{i,j} \mapsto \delta_{ij} \end{array}$$

extesos per linealitat. (*Coàlgebra de matrius*)
Amb l'estructura usual d'àlgebra i aquesta de coàlgebra $\mathbb{M}_{n\times n}(k)$ no té estructura de biàlgebra.

Exemples

6. L'àlgebra de l'exemple 2:

$H = \mathbb{Q}[c, s]/(3s^2 + c^2 - 1, (2c + 1)s, (2c + 1)(c - 1))$ on $c, s \in End_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}))$ són

$$\begin{array}{lll} c(1) = 1, & c(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha, & c(\alpha^2) = -\frac{1}{2}\alpha^2 \\ s(1) = 0, & s(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha, & s(\alpha^2) = -\frac{1}{2}\alpha^2. \end{array}$$

H té estructura de coàlgebra

$$\begin{array}{llcll} \Delta : & H \to H \otimes H & \qquad & \varepsilon : & H \to \mathbb{Q} \\ & Id \mapsto Id & & & Id \mapsto 1 \\ & c \mapsto c \otimes c - 3s \otimes s & & & c \mapsto 1 \\ & s \mapsto s \otimes c + c \otimes s & & & s \mapsto 0 \end{array}$$

Té també estructura de biàlgebra

Exemples

7. La biàlgebra de grup:

G grup finit. L'àlgebra de grup és $k[G] = \{\sum_{g\in G} a_g \cdot g, a_g \in k\}$.

- Producte: Si $g, h \in G$, $(\sum_{g\in G} a_g \cdot g)(\sum_{h\in G} b_h \cdot h) = \sum_{g,h\in G} a_g b_h \cdot gh.$
- Coàlgebra amb $\Delta(g) = g \otimes g, \quad \varepsilon(g) = 1, \qquad \forall g \in G$, extesos per linealitat

  És cocommutativa.
- Com $\Delta(g\,h) = \Delta(g)\Delta(h)$ i $\varepsilon(g\,h) = 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h)$,
  $\Rightarrow k[G]$ és una biàlgebra.

Exemples

8. La biàlgebra de funcions:

G grup finit. Considerem el conjunt de funcions $\mathcal{O}(G) = k^G = \{ f : G \to k \}$

- Estructura d'e.v. (amb la suma i el producte per escalars usuals) de dimensió $|G|$ amb base $\{e_g,\ g \in G\}$ on $e_g(h) = \delta_{g,h}$.
- Producte: Si $g, h \in G, m(e_g \otimes e_h) = \delta_{g,h} e_g$. Estructura d'àlgebra
- Coàlgebra amb coproducte

  $$\Delta(e_g) = \sum_{u \in G} e_u \otimes e_{u^{-1}g},$$

  o, equivalentment

  $$\begin{array}{rcl} \Delta : \mathcal{O}(G) & \longrightarrow & \mathcal{O}(G \times G) \\ f & \mapsto & \Delta(f) : \quad \begin{array}{rl} G \times G & \to k \\ (g,h) & \mapsto f(gh) \end{array} \end{array}$$

  i counitat $\varepsilon(f) = f(1_G)$.

- És una biàlgebra.

Si G és no abelià, aquesta biàlgebra és commutativa però no cocommutativa.

Obs: Estructura d'àlgebra al conjunt $\mathcal{O}(S) = k^S = \{ f : S \to k \}$ per qualsevol conjunt S.

Notació Sigma o notació de Sweedler

Normalment denotem el producte

$$ab := m(a \otimes b).$$

Notació de Sweedler del coproducte en la coàlgebra (C, Δ, ε):

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2 \qquad \text{ó} \qquad \Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \qquad c \in C$$

Amb aquesta notació:

- Coassociativitat: $\sum c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} = \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3$.
- Counitat: $\sum \varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1 \varepsilon(c_2) = c \in C$.
- Cocommutativa $\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1 \qquad \forall c \in C$.

Morfismes d'àlgebres i coàlgebres

(A, m_A, u_A) i (B, m_B, u_B) dues k-àlgebres. $f : A \to B$, k-lineal és **morfisme d'àlgebres** si

$$\begin{cases} f(a,b) = f(a)f(b) & (\Leftrightarrow f(m_A(a \otimes b)) = m_B(f(a) \otimes f(b))) \\ f(1_A) = 1_B, & \forall a, b \in A, \end{cases}$$

$(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ i $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$, k-coàlgebres. $g : C \to D$,k-lineal és **morfisme d'coàlgebres** si

$$\begin{cases} \Delta_D \circ g = (g \otimes g)\Delta_C & (\Leftrightarrow \Delta_D(g(c)) = \sum g(c)_1 \otimes g(c)_2 = \sum g(c_1) \otimes g(c_2)) \\ \varepsilon_C = \varepsilon_D \circ g, \end{cases}$$

és a dir, si són commutatius els diagrames:

morfime d'àlgebres

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

morfisme de coàlgebra

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "g \otimes g"'] & D \otimes D \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & K \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ & k & \end{tikzcd}$$

Morfismes d'àlgebres i coàlgebres

Proposició:
H és k-e.v. amb estructura d'àlgebra (H, m, u) i de coàlgebra (H, Δ, ε). Aleshores

$$m \text{ i } u \text{ són morfismes de coàlgebres}$$
$$\Updownarrow$$
$$\Delta \text{ i } \varepsilon \text{ són morfismes d'àlgebres.}$$

En aquest cas, $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ té estructura de biàlgebra.

Definició:
H i L dues k-biàlgebres.
Una aplicació lineal $f : H \to L$ és un **morfisme de biàlgebres** si és morfisme d'àlgebres i morfisme de coàlgebres.

Convolució. Antípoda

Siguin (A, m, u) àlgebra, (C, Δ, ε) coàlgebra sobre k i considerem Hom$(C, A) = \{f : C \to A,$ lineals$\}$ que és k-e.v.

Definició: Definim a Hom(C, A) una multiplicació, anomenada **convolució**: Si $f,\ g \in$ Hom(C, A)

$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta : C \to A.$$

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f*g} & A \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle m} \\ C \otimes C & \xrightarrow[f\otimes g]{} & A \otimes A \end{array}$$

En la notació de Sweedler: $(f * g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2)$.

- La convolució és associativa: $((f * g) * h)(c) = (f * (g * h))(c)$.

- L'aplicació $u\varepsilon \in$ Hom(C, A) és l'element unitat: $f * u\,\varepsilon = f$ i $u\,\varepsilon * f = f$.

Amb aquesta operació de convolució, Hom(C, A) té estructura de k-àlgebra.

Convolució. Antípoda

Si tenim una biàlgebra $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$, End$(A) =$ Hom(A, A) formen un àlgebra per convolució. L'element unitat d'aquesta àlgebra és $u\,\varepsilon$.

Observació:
L'aplicació $Id : A \to A$ és un element de End(A), però no és l'element unitat (composició i convolució són operacions diferents).

Definició: Sigui $(A, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una biàlgebra.
Una aplicació lineal $S : A \to A$ és diu **antípoda** de A si és la inversa de la identitat Id a End(A) per la convolució, és a dir si

$$Id * S = m(Id \otimes S)\Delta = u\,\varepsilon \qquad i \qquad S * Id = m(S \otimes Id)\Delta = u\,\varepsilon,$$

ó, equivalentment, si

$$\sum c_1 \otimes S(c_2) = \sum S(c_1) \otimes c_2 = \varepsilon(c) \cdot 1_A, \quad \forall c \in A.$$

L'antípoda, si existeix, és única.

Àlgebra de Hopf: Definicions i propietats

Un **àlgebra de Hopf** és una biàlgebra que té antípoda.

Un morfisme d'àlgebres de Hopf és un morfisme de biàlgebres.

Proposició: H_1 i H_2 dues àlgebres de Hopf amb antípodes S_1 i S_2.
Si $f : H_1 \to H_2$ és un morfisme de biàlgebres, aleshores $S_2 \circ f = f \circ S_1$:

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{f} & H_2 \\ {\scriptstyle S_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S_2} \\ H_1 & \xrightarrow[f]{} & H_2. \end{array}$$

Propietats:

1. $S(1) = 1$
2. $S(ab) = S(b)S(a), \quad \forall a, b \in H$

$\} \Rightarrow S$ és antimorfisme d'àlgebres.

3. $\varepsilon(S(a)) = \varepsilon(a), \quad \forall a \in H$
4. $\Delta(S(a)) = \sum S(a_2) \otimes S(a_1), \quad \forall a \in H$

$\} \Rightarrow S$ és antimorfisme d'coàlgebres.

5. $S^2 = S \circ S = Id \Leftrightarrow \sum S(a_2)a_1 = \varepsilon(a) \cdot 1, \Leftrightarrow \sum a_2 S(a_1) = \varepsilon(a) \cdot 1, \forall a \in A.$

$\Rightarrow H$ commutativa ó cocommutativa, aleshores $S^2 = Id$.

Àlgebra de Hopf: Exemples

- L'àlgebra de grup $k[G]$ (amb G grup finit).

  L'antípoda és $S(g) := g^{-1}, \forall g \in G$ extesa per linealitat.

  Les relacions $Id * S = u\,\varepsilon = S * Id$ són $gg^{-1} = 1 = g^{-1}g, \forall g \in G$.

- La biàlgebra de funcions $\mathcal{O}(G)$.

  L'antípoda és $S(f)(g) := f(g^{-1}), \forall g \in G, \forall f \in \mathcal{O}(G)$.

  Les relacions són $f(gg^{-1}) = f(1) = f(g^{-1}g)\; en\; \mathcal{O}(G)$.

- $H = Q(s,c)$ de l'exemple 6 de biàlgebres.

  L'antípoda és l'aplicació

$$
\begin{array}{rl}
S : H & \to H \\
Id & \mapsto Id \\
c & \mapsto c \\
s & \mapsto -s
\end{array} .
$$

Biàlgebra dual. L'àlgebra de Hopf dual

Si V k-e.v. de dim. finita, $V^* = \text{Hom}(V,k) = \{f : V \to k, \text{ aplicacions } k\text{-lineals}\}$ és l'espai dual.
Si $f : V \to W$ és una aplicació lineal, l'aplicació dual és $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ definida per

$$f^*(\omega)(v) = \omega(f(v)), \quad \omega \in W^*, v \in V.$$

Definició: Biàlgebra dual Sigui $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una k-biàlgebra de dim. finita. Aleshores

- $m' := \Delta^* : H^* \otimes H^* \to H^*$ és associativa i $u' := \varepsilon^* : K \to H^*$ és unitat
  $\Rightarrow (H^*, m', u')$ és l'àlgebra dual de la coàlgebra (H, Δ, ε).
- $\Delta' := m^* : H^* \to H^* \otimes H^*$ és coassociativa i $\varepsilon' := u^* : H^* \to k$ counitat
  $\Rightarrow (H^*, \Delta', \varepsilon')$ és la coàlgebra dual de l'àlgebra (H, m, u).

A més, $(H^*, m', u', \Delta', \varepsilon')$ és una biàlgebra, **la biàlgebra dual** de H.

Es pot veure que $\Delta^*(f \otimes g)(c) = \sum f(c_1)g(c_2) = (f * g)(c)$ (producte de convolució).

Proposició:
H és un àlg. de Hopf amb antípoda $S \Rightarrow$ l'àlgebra dual H^* és un àlgebra de Hopf amb antípoda S^*.

Per G finit, les àlgebres de Hopf $\boxed{K[G] \text{ i } \mathcal{O}(G) \text{ són duals una de l'altra}}$.

La coàlgebra kS i l'àlgebra $(kS)^* \simeq k^S$

Sigui $S \neq \emptyset$ un conjunt. Posem $< S >_k = kS$ el k-e.v. amb base S,

KS és coàlgebra amb coproducte i counitat:
$$\begin{aligned} \Delta : \quad & kS \to kS \otimes V \\ & s \mapsto s \otimes s \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varepsilon : \quad & kS \to k \\ & s \mapsto 1 \end{aligned}$$

extesos per linealitat.

L'àlgebra dual de kS és $kS^* = \text{Hom}_k(kS, k)$ amb producte

$$\Delta^*(f \otimes g)(s) = (f * g)(s) = f(s)g(s)$$

que és el producte usual.
A més tenim l'isomorfisme d'àlgebres

$$\begin{aligned} (kS)^* \quad & \simeq k^S = \{f : S \to k\} \\ f \quad & \mapsto f_{|S}. \end{aligned}$$

Proposició:
Sigui S un conjunt. Si k^S té estructura d'àlgebra de Hopf, aleshores S té estructura de grup.
En particular, a partir del coproducte de k^G es recupera el producte de G.

Per donar una idea de l'estructura parlem dels "grouplike"elements.

”Grouplike”elements

Definició: Sigui G una k-coàlgebra.
Un element $g \in C$ és diu elements ”grouplike”si $g \neq 0$ i $\Delta(g) = g \otimes g$.

Denotem per $G(C)$ el conjunt d’elements ”grouplike”de C.

$$\boxed{G(C) = \{g \in C | g \neq 0, \Delta(g) = g \otimes g\}}$$

Propietats: Si $g \in G(G)$ aleshores $\varepsilon(g) = 1$.
Els elements de $G(C)$ són linealment independents.

Teorema:
1. Si H és un àlgebra de Hopf $\Rightarrow G(H)$ és un grup amb la multiplicació induida per la de H.
Idea prova: (Δ és un morfisme d’àlgebres)

· $1_H = u(1) \in G(H)$
· És tancat per la multiplicació: $x, y \in G(H) \Rightarrow \Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y) = (x \otimes x)(y \otimes) = xy \otimes xy$
· Si $x \in G(H)$ el seu invers és $S(x) \in G(H)$.

2. Si S conjunt i kS la coàlgebra anterior, aleshores $G(kS) = S$.
Idea prova: $\supseteq$ clara, per fer $\subseteq$:

· Si $g \in G(kS)$ del fet $\Delta(g) = g \otimes g \rightsquigarrow g = as, a \in k, s \in S$.
· Com $1 = \varepsilon(g) = a\varepsilon(s) = a$, tenim $g \in S$.

Proposició:
Sigui S un conjunt. Si k^S té estructura d'àlgebra de Hopf, aleshores S té estructura de grup.
En particular, a partir del coproducte de k^G es recupera el producte de G.

Idea prova:

Si k^S és àlgebra de Hopf aleshores $G(k^S) = S$ grup.

Si G grup, a $\mathcal{G} = k^G$ tenim el coproducte $\Delta : k^G \to k^G \otimes k^G$.

L'àlgebra dual és $(k^G)^* \simeq k[G]$ amb producte $m' = \Delta^* : k[G] \otimes k[G] \to k[G]$ i $m'_{|G}$ dóna l'estructura de producte a G.

Accions i coaccions

Acció d'un grup en un conjunt

G grup i X conjunt,

G opera (per l'esquerra) sobre X (o tenim una acció per l'esquerra de G en X) si es té una aplicació

$$\begin{array}{rll} \lambda: & G\times X & \to X \\ & (g,x) & \mapsto \lambda(g,x)=g\cdot x \end{array} \quad \text{satisfent} \quad \begin{array}{rl} g\cdot(h\cdot x) & =(gh)\cdot x \\ 1\cdot x & =x \end{array} \quad \forall g,h\in G, \quad \forall x\in X.$$

- Si $g\in G$, l'apl. $\lambda_g := \lambda(g) = X\to X,\ \ \lambda_g(x)=g\cdot x$ és permutació de X amb inversa $\lambda(g^{-1})$.
- Un morfisme de grups $\sigma : G\to$ Perm(X) indueix una acció de G en X, $\ g\cdot x=\sigma(g)(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{accions de } G \text{ sobre } X, \text{ és a dir} \\ \text{estructures de } X \text{ com a } G-\text{conjunts} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{morfismes de grups} \\ G\to \text{Perm}(X) \end{array} \right\}.$$

Una acció és:

Fidel si elements de G diferents operen sobre X de manera diferent, i.e. $g\cdot x=x\,\forall x\in G\Leftrightarrow g=1_G$.
$\Leftrightarrow$ si el morfisme $G\to$ Perm(X) és injectiu.

Transitiva si per a tot parell $x,y\in X$, $\exists g\in G$ tal que $g\cdot x=y$. $\Leftrightarrow$ si hi ha una única òrbita $Gx=X$.

Donada una acció $G\times X\to X$, **l'aplicació canònica** associada és la funció

$$\begin{array}{rll} \gamma: & G\times X & \to X\times X \\ & (g,x) & \mapsto (x,g\cdot x). \end{array}$$

Se satisfà que

γ injectiva $\Leftrightarrow$ l'acció és fidel $\qquad$ γ exhaustiva $\Leftrightarrow$ l'acció és transitiva.

Acció d'un àlgebra sobre un espai vectorial

(A, m, u) una K-àlgebra i V un k-espai vectorial.

Una acció (per l'esquerra) de A sobre V és una aplicació lineal

$$\begin{aligned} \theta: \quad A \otimes V &\to V \\ a \otimes v &\mapsto \theta(a \otimes v) = a \cdot v \end{aligned}$$

tal que, si fixat $a \in A$, posem $\theta_a : V \to V$, satisfà $\forall a, b \in A$

$$\begin{array}{ll} \theta_{ab} = \theta_{m(a,b)} = \theta_a \circ \theta_b & \Leftrightarrow \theta(Id_A \otimes \theta) = \theta(m \otimes Id_V) : A \otimes A \otimes V \to V \\ \theta_{1A} = \theta_{u(1)} = Id_V & \Leftrightarrow \theta(u \otimes Id_V) = Id_V : V \to V \end{array}$$

Cada θ_a és una aplicació lineal de V en V, tenim un morfisme de k-àlgebres

$$\begin{aligned} A &\to \mathrm{End}_K(V) \\ a &\mapsto \theta_a. \end{aligned}$$

Acció d'una biàlgebra sobre un àlgebra. Acció de Hopf

$(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ una biàlgebra i A un àlgebra sobre k.

Una acció de Hopf (a l'esquerra) de H sobre A, és una acció de l'àlgebra (H, m, u) sobre l'espai vectorial A

$$\begin{array}{rll} \theta: & H \otimes A & \rightarrow A \\ & h \otimes a & \mapsto h \cdot a \end{array} \quad \text{amb} \quad \begin{array}{l} \theta_{m(h_1,h_2)} = \theta_{h_1} \circ \theta_{h_2} \\ \theta_{u(1)} = Id_A \end{array} ,$$

que satisfà, a més,

$$\theta(h, ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b)$$

$$\theta(h, 1_A) = \varepsilon(h) 1_A$$

on $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$.
Si tenim una acció d'aquest tipus, H és un A-mòdul.

Si $H = k[G]$ amb dues estructures diferents:
· Si $\Delta(g) = g \otimes g$ i $\varepsilon(g) = 1$ les regles anteriors són:

$$\theta(h, ab) = (h \cdot a)(h \cdot b), \quad \theta(h, 1_A) = 1_A \Rightarrow \theta_h \in \text{End}(A), \text{(morfisme d'àlgebres).}$$

· Si $\Delta(g) = g \otimes 1 + 1 \otimes g$ i $\varepsilon(g) = 0$, les regles són

$$\theta(h, ab) = (h \cdot a)b + a(h \cdot b), \quad \theta(h, 1_A) = 0 \Rightarrow \theta_h \in \text{End}(A) \text{és una derivació de l'àlgebra} A.$$

Acció de Hopf. Exemples

Exemple 1: Extensions de Galois

Si K/k és una extensió de Galois amb grup G, és també una extensió de Hopf-Galois amb Àlgebra de Hopf $H = k[G]$ amb $\Delta(g) = g \otimes g$ i $\varepsilon(g) = 1$ i acció

$$\begin{array}{rccc} \mu: & K[G] & \to & \mathrm{End}_k(K) \\ & \sum_{g\in G} a_g g & \mapsto & \sum_{g\in G} a_g \varphi(g) \end{array}$$ induïda per l'isomorfisme $G \overset{\varphi}{\simeq} \mathrm{Aut}(K|k)$.

Com

$$\left.\begin{array}{l} \mu(g)(xy) = \varphi(g)(xy) = \varphi(g)(x)\,\varphi(g)(y) \\ \mu(g, 1_A) = \varphi(g)(1_A) = 1_A \end{array}\right. \Rightarrow$$ acció de Hopf

Exemple 2: L'extensió $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})|\mathbb{Q}$

$H = \mathbb{Q}[c, s]/(3s^2 + c^2 - 1, (2c+1)s, (2c+1)(c-1))$ amb

$$\begin{array}{lll} \Delta(c) = c \otimes c - 3s \otimes s & \varepsilon(c) = 1 & S(c) = c \\ \Delta(s) = s \otimes c + c \otimes s & \varepsilon(s) = 0 & S(s) = -s \end{array}$$

i acció $\mu : H \to \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha))$ donada per

$$c(1) = 1, c(\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha, c(\alpha^2) = -\frac{1}{2}\alpha^2 \qquad s(1) = 0, s(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha, s(\alpha^2) = -\frac{1}{2}\alpha^2.$$

Les relacions d'anell de $\mathbb{Q}(\alpha)$

$c(xy) = c(x)\cdot c(y) - 3\cdot s(x)\cdot s(y) \quad s(xy) = c(x)\cdot s(y) + s(x)\cdot c(y),\ x, y \in \mathbb{Q}(\alpha)$ són exactament la condició $\mu(h, xy) = \sum (h_1 \cdot x)(h_2 \cdot y)$

Coaccions

(C, Δ, ε) una k-coàlgebra i V un k-e.v.
Una coacció (a la dreta) de C sobre V és una aplicació lineal

$$\begin{array}{lll} \delta : & V & \to V \otimes C \\ & v & \mapsto \delta(v) := \sum v_0 \otimes v_1 \text{ (notació)} \end{array}$$

(es posa, per conveni $v_0 \in V, \quad , v_1, v_2, \cdots \in C$)
tal que

$$(\delta \otimes Id_C)\delta = (Id_V \otimes \Delta)\delta : V \to V \otimes C \otimes C \qquad \sum v_{00} \otimes v_{01} \otimes v_1 = \sum v_0 \otimes v_{11} \otimes v_{12}$$
$$:= \sum v_0 \otimes v_1 \otimes v_2$$

$$(Id_V \otimes \varepsilon)\delta = Id_V : V \to V \qquad \sum v_0 \varepsilon(v_1) = v \in V.$$

Coacció dual

V un k-e.v. dim finita

Àlgebra (A, m, u)

Acció: $\theta: \quad A \otimes V \quad \to V$

$a \otimes v \quad \mapsto \theta(a \otimes v) = a \cdot v$

$$\begin{cases} \theta(Id_A \otimes \theta) = \theta(m \otimes Id_V) \\ \theta(u \otimes Id_V) = Id_V \end{cases}$$

Coàlgebra (C, Δ, ε)

Coacció: $\delta: \quad V \quad \to V \otimes C$

$v \quad \mapsto \delta(v) := \sum v_0 \otimes v_1$

$$\begin{cases} (\delta \otimes Id_C)\delta = (Id_V \otimes \Delta)\delta \\ (Id_V \otimes \varepsilon)\delta = Id_V \end{cases}$$

acció (a l'esquerra) $\dashleftarrow$ coacció (a la dreta)

$$\begin{aligned} \theta: \quad C^* \otimes V \to \quad & V \\ f \otimes v \mapsto \quad & (Id_V \otimes f)(\delta(v)) = \\ & = \sum v_{(0)} f(v_{(1)}), \end{aligned}$$

$\dashleftarrow$ $\delta: V \to V \otimes C$

acció (a l'esquerra) $\dashrightarrow$ coacció dual (a la dreta)

$\{h_1, \ldots, h_n\}$ base de $A_{|k}$

$\{f_1, \ldots, f_n\}$ és la base de $A^*_{|k}$ dual

$\theta: A \otimes V \to V$ $\dashrightarrow$

$$\begin{aligned} \delta: \quad V \quad & \to V \otimes A^* \\ v \quad & \mapsto \delta(v) := \textstyle\sum_{k=1}^n (h_k \cdot v) \otimes f_k = \\ & = \textstyle\sum_{k=1}^n \theta(h_k, v) \otimes f_k. \end{aligned}$$

Proposició:
Siguin H una k-biàlgebra i A una k-àlgebra.

Siguin $\theta : H \otimes A \to A$ una acció de la biàlgebra H sobre A
i $\delta : A \to A \otimes H^*$ la seva coacció dual,
aleshores

θ és una acció de Hopf	$\Leftrightarrow$	δ és un morfisme d'àlgebres $(\delta(1_A) = 1_A \otimes 1_{H^*}, \delta(ab) = \delta(a)\delta(b))$.

Subespais invariants i coinvariants

• $\theta : H \otimes A \to A$ una acció de Hopf.
El **subespai invariant** de A sota l'acció de H és el subespai

$$A^H := \{a \in A \,|\, \theta(h, a) = \varepsilon(h) \cdot a, \quad \forall h \in H\}.$$

És una subàlgebra

Si $H = k[G]$, $\Delta(g) = g \otimes g$ i $\varepsilon(g) = 1, \quad \forall g \in G$, tenim que $A^{k[G]} =: A^G$ elements fixos.
En particular, si K/k és una extensió de cossos i G actua per automorfismes de K, K^G és el cos fix.

• Sigui $\delta : A \to A \otimes H$ una coacció d'àlgebres, és a dir, una coacció d'una biàlgebra H sobre un àlgebra A que és morfisme d'àlgebres.
La **subàlgebra coinvariant** de A sota δ és

$$A^{coH} := \{a \in A \,|\, \delta(a) = a \otimes 1_H\}.$$

Extensions, àlgebres de Hopf i accions

k cos, K/k extensió de cossos finita, L/K extensió de cossos finita.

- Si $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ és un àlg. de Hopf $/k$ amb antípoda S, $\Rightarrow K \otimes_k H$ és un àlge. de Hopf $/K$:

  · Producte usual d'extensions: $(a \otimes h)(b \otimes h') = ab \otimes hh'$.

  · $$\begin{array}{rll} \Delta_K : & K \otimes_k H & \to (K \otimes_k H) \otimes_K (K \otimes_k H) \\ & a \otimes h & \to \sum (a \otimes h_1) \otimes (1 \otimes h_2) \end{array}$$

  · $$\begin{array}{rll} \varepsilon_K : & K \otimes_k H & \to K \\ & a \otimes h & \to a\varepsilon(h) \end{array}$$ · $$\begin{array}{rll} S_K : & K \otimes_k H & \to K \otimes H \\ & a \otimes h & \to a \otimes S(h) \end{array}$$

- Si tenim una acció $\mu' : H \otimes K \to K$, tenim l'acció sobre L

$$\begin{array}{rl} (L \otimes H) \otimes_K (L \otimes K) & \to L \otimes K \\ (a \otimes h) \otimes (b \otimes t) & \to ab \otimes ht \end{array}$$

o, equivalentment, si $\mu : H \to \mathrm{End}(K)$, tenim

$$\begin{array}{rll} \mu_L : & L \otimes H & \to \mathrm{End}(L \otimes K) \\ & a \otimes h & \to \mu_L(a \otimes h)(b \otimes t) = ab\mu(h)(t). \end{array}$$

L'aplicació canònica

L'aplicació canònica associada a una coacció

A k-àlgebra i B subàlgebra de A.
Sigui J l'ideal de $A \otimes A$ associat a B,

$$J =< ab \otimes a' - a \otimes ba' \quad a, a' \in A, b \in B > .$$

Posem $A \otimes_B A := (A \otimes A)/J$ i notem $a \otimes_B a'$ la classe de $a \otimes a'$.

Definició:
Sigui $\delta : A \to A \otimes H$ una coacció d'una biàlgebra H sobre un àlgebra A.
Posem $B = A^{coH}$, la subàlgebra coinvariant.

L'**aplicació canònica associada a** δ és l'aplicació k-lineal

$$\begin{array}{rll} \beta : & A \otimes_B A & \to A \otimes H \\ & c \otimes_B a & \mapsto \sum c\, a_0 \otimes a_1 = (c \otimes Id_H)\delta(a), \end{array}$$

és a dir,

$$\beta := (m_A \otimes Id_H)(Id_A \otimes \delta).$$

Està ben definida.

L'aplicació canònica en termes d'acció

Observació: Si U, V són k-e.v. de dim. finita hi ha una correspondència lineal natural que es pot explicitar

$$\begin{array}{ccc} \{\text{apl. lineals } U \otimes U \to U \otimes V^*\} & \to & \{\text{apl. lineals } U \otimes V \to U^* \otimes U \simeq \text{End}(U)\} \\ \beta & \to & \beta^\sharp \end{array}$$

A més, si $dim_k U = dim_k V$, aquesta correspondència preserva les aplicacions bijectives.

H una biàlgebra i A un àlgebra totes dues de dimensió finita.
$\theta : H \otimes A \to A$ una acció de Hopf , $\quad \delta : A \to A \otimes H^*$ la seva coacció dual,
i **suposem** que $A^{coH^*} = k$.

Si l'aplicació canònica $\beta : A \otimes A \to A \otimes H^*$ corresponent a δ és una bijecció, aleshores tenim la bijecció corresponent

$$\begin{array}{lll} \beta^\sharp & A \otimes H \longrightarrow \text{End}(A) & \\ & c \otimes h \longrightarrow \beta^\sharp(c \otimes h) : & A \to A \\ & & a \mapsto c(\theta(h \otimes h)) = c(h \cdot a). \end{array}$$

L'aplicació canònica en la Teoria d'extensions de cossos

K/k una extensió de cossos finita. $G \simeq Aut_k(K) = \{\sigma : K \to K | \sigma_{|k} = Id_k\} = \{\sigma_g | g \in G\}$.

· **Àlgebra i Acció:**

$k[G]$ amb l'estructura de Hopf $k[G] = \{h = \sum_{g\in G} a_g \cdot g\}$ amb $\Delta(g) = g \otimes g, \varepsilon(g) = 1$.

$\{\sigma_g,\ g \in G\}$ una base del k-e.v. $k[G]$

Del grup G en el conjunt K

$$\begin{array}{ll} G \times K & \to K \\ (\sigma, x) & \mapsto \sigma(x). \end{array}$$

extesa per linealitat

$$\begin{array}{lll} \theta : & k[G] \times K & \to K \\ & (\sum_{g\in G} a_g \cdot g, x) & \mapsto \sum_{g\in G} a_g \cdot \sigma_g(x). \end{array}$$

És una acció de Hopf ja que

$$\theta(g, xy) = \sigma_g(xy) = \sigma_g(x)\sigma_g(y) = \theta(g, x)\theta(g, y).$$

· **Coacció dual**.

L'àlgebra dual $k[G]^* = \mathcal{O}(G) = k^G = \{f : G \to k,$ funcions$\}$.

Base dual $\{e_g,\ g \in G\}$ que és base de $\mathcal{O}(G)$.

La coacció dual és:

$$\begin{array}{lll} \delta : & K & \to K \otimes \mathcal{O}(G) \\ & x & \mapsto \sum_{g\in G} \sigma_g(x) \otimes e_g. \end{array}$$

L'aplicació canònica en la Teoria d'extensions de cossos

· **Coacció dual**.

L'àlgebra dual $k[G]^* = \mathcal{O}(G) = k^G = \{f : G \to k, \text{funcions}\}$. Base dual $\{e_g,\ g \in G\}$.

Coacció dual: $$\begin{array}{rcl} \delta : \quad K & \to & K \otimes \mathcal{O}(G) \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{g \in G} \sigma_g(x) \otimes e_g. \end{array}$$

- La *subàlgebra coinvariant* és $K^{co\mathcal{O}(G)} = K^G$, el cos fix sota l'acció de G:

$$x \in K^{co\mathcal{O}(G)} \Leftrightarrow \delta(x) = x \otimes 1_{\mathcal{O}(G)} \Leftrightarrow \sum_{g \in G} \sigma_g(x) \otimes e_g = \sum_{g \in G} x \otimes e_g \Leftrightarrow \sigma_g(x) = x, \forall g \in G \Leftrightarrow x \in K^G,$$

ja que $1_{\mathcal{O}(G)} = \sum_{g \in G} e_g$ i els $\{e_g\}$ són L.I.

L'aplicació canònica en la Teoria d'extensions de cossos

· **Coacció dual**.

L'àlgebra dual $k[G]^* = \mathcal{O}(G) = k^G = \{f : G \to k, \text{funcions}\}$. Base dual $\{e_g,\ g \in G\}$.

Coacció dual:
$$\begin{aligned} \delta : \quad K &\to K \otimes \mathcal{O}(G) \\ x &\mapsto \sum_{g \in G} \sigma_g(x) \otimes e_g. \end{aligned}$$

- La *subàlgebra coinvariant* és $K^{co\mathcal{O}(G)} = K^G$, el cos fix sota l'acció de G:

En particular, si K/k és Galois i $G = \mathrm{Gal}(K/k)$, $K^{co\mathcal{O}(G)} = K^G = k$.

- L'*aplicació canònica*: Posem $E = K^G$.

$$\begin{aligned} \beta : \quad K \otimes_E K &\to K \otimes \mathcal{O}(G) \\ a \otimes_E b &\mapsto \sum_{g \in G} a\sigma_g(b) \otimes e_g. \end{aligned}$$

· $K \otimes_E K$ dues còpies de K com a E-e.v.

$\dim_k(K \otimes_E K) = [K : E]^2[E : k] = [K : k][K : E]$.

· $K \otimes \mathcal{O}(G)$

$\dim_k(K \otimes \mathcal{O}(G)) = [K : k] \dim_k(\mathcal{O}(G)) = [K : k]|G| = [K : k][K : E]$,

perquè, pel Teorema d'Artin $|G| = [K : K^G] = [K : E]$.

Per tant, l'aplicació canònica β és una aplicació lineal entre dos espais de la mateixa dimensió.

Pel Teorema d'independència de caràcters (injectivitat), aquesta aplicació canònica és **bijectiva**.

L'aplicació canònica en la Teoria d'extensions de cossos

Posem $E = K^G$. L'*aplicació canònica* $\beta : K \otimes_E K \to K \otimes \mathcal{O}(G)$ és bijectiva.

- Si K/k és Galois, $E = k$ i tenim la bijecció $K \otimes_k K \leftrightarrow K \otimes \mathcal{O}(G)$.
- Si K/k no és Galois, $E = K^G \neq k$ i $[K^G : k] > 1$. En aquest cas

$$\left.\begin{array}{l} \dim_k(K \otimes_k K) = [K : k]^2 \\ \dim_k(K \otimes \mathcal{O}(G)) = [K : k][K : E] \end{array}\right\} \Rightarrow \dim_k(K \otimes_k K) > \dim_k(K \otimes \mathcal{O}(G)).$$

Per tant, la dimensió $\dim_k(K \otimes \mathcal{O}(G))$ és "petita", és a dir, G és petit, tenim "pocs"automorfismes.

Corol·lari:

L'extensió K/k és de Galois $\Leftrightarrow$ l'aplicació $\beta : K \otimes K \to K \otimes \mathcal{O}(G)$ és bijectiva.

En aquest cas tenim l'aplicació bijectiva

$$\begin{array}{lll} \beta^\sharp & K \otimes k[G] \longrightarrow \mathrm{End}(K) & \\ & c \otimes h \longrightarrow \beta^\sharp(c \otimes h) : & A \to A \\ & & a \mapsto c(\theta(h \otimes h)) = c(h \cdot a) \end{array}$$

que és $\beta^\sharp = (1, \theta)$

en funció de l'acció θ.

Extensió de Hopf-Galois

Extensió de Hopf-Galois. Definició

Sigui K/k una extensió finita de cossos.

Diem que K/k és una extensió de Hopf-Galois si existeixen:

- un àlgebra de Hopf H sobre k de dimensió finita i
- una acció de Hopf sobre K, $\mu : H \to \text{End}(K)$, és a dir, tal que

$$\begin{array}{ll} \mu(h)(xy) = \sum (h_{(1)}x)(h_{(2)}y) & \forall h \in H \\ \mu(h)(1_K) = \varepsilon(h) \cdot 1 & \forall x, y \in K. \end{array}$$

tal que l'aplicació $(1, \mu) : K \otimes_k H \to \text{End}(K)$ és un isomorfisme.

En aquest cas, diem que K/k és una extensió Hopf-Galois mitjançant H ó una extensió H-Galois.

Extensió de Hopf-Galois. Definició equivalent

Equivalentment:

K/k és una extensió de Hopf-Galois si existeixen:

- un àlgebra de Hopf $H_{|k}$ de dimensió finita que té per dual H^* i
- una coacció $\mu'' : K \to K \otimes H^*$ que és un morfisme d'àlgebres, de manera que l'aplicació canònica associada a μ''

$$\begin{array}{rll} (mult_K \otimes Id_H)(Id_K \otimes \mu'') : & K \otimes K & \to K \otimes H^* \\ & (x, y) & \to \sum xy_0 \otimes y_1 = (x \otimes Id)\mu''(y) \end{array}$$

sigui un isomorfisme.